Für die harmonische Schwingung kann man also mit der Kreisfrequenz ω die Bewegungsgrößen Weg, Schnelle und Beschleunigung umrechnen. Das Minuszeichen in Gl. 3.8 und 3.9 besagt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Maximum der Weg-Zeit-Funktion vorliegt und die Bewegungsumkehr hin zu Punkt mit den Koordinaten $x = 0$ erfolgt. Der einmaligen Ableitung entspricht also die Multiplikation mit $-\omega$, der zweimaligen Differentiation eine Multiplikation mit $-\omega^2$. Ebenso entspricht einer Integration durch die Division durch $-\omega$ und einer zweimaligen Integration eine Division durch $-\omega^2$.

Für die Amplituden der Schnelle und Beschleunigung werden die Sinus- bzw. Cosinus-Funktion durch den Wert -1 ersetzt:

$$\hat{\dot{x}}(t) = -\hat{x} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi_0)}_{-1} \cdot \omega = \hat{x} \cdot \omega = \hat{x} \cdot 2\pi f \tag{3.10}$$

$$\hat{\ddot{x}}(t) = -\hat{x} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_0)}_{-1} \cdot \omega^2 = \hat{x} \cdot \omega^2 = \hat{x} \cdot 4\pi^2 f^2 \; . \tag{3.11}$$

Beispiel

In der Schwingprüfung von Anbauteilen soll eine Beschleunigungsamplitude von $\pm 20g$ bei einer Frequenz von 30 Hz erreicht werden. Wie groß ist die Wegamplitude an dem Schwingprüfsystem?

Die Wegamplitude wird durch Umstellen der Gl. 3.11 errechnet:

$$\hat{x} = \frac{\hat{\ddot{x}}(t)}{4\pi^2 f^2} = \frac{20 \cdot 9{,}81 \, \frac{m}{s^2}}{4\pi^2 \cdot 30^2 \, \frac{1}{s^2}} = 0{,}0055 \, m = 5{,}5 \, mm \; .$$

3.2 Zeigerdiagramm

Für die Darstellung von Schwingungsvorgängen und deren Lösung hat sich deren mathematische Behandlung als *Zeiger* in der komplexen Zahlenebene bewährt [4–6]. Damit ist eine übersichtliche Darstellung und durch die Anwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen eine einfache Lösung von Schwingungsgleichungen möglich. Hierbei stellt man sich die harmonische Schwingung als Kreisbewegung eines Punktes und dessen Parallelprojektion auf die reelle Achse (d. h. Abszisse) vor (Abb. 3.2). Die Position des Punktes wird über die Spitze eines rotierenden Zeigers mit der Länge der Amplitude $\hat{x}$ erfasst. Die Projektion auf die reelle Achse wird als *Realteil* $\mathrm{Re}(\underline{x})$ bezeichnet, der senkrecht dazu stehende Anteil *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(\underline{x})$ ergibt sich durch Projektion auf die imaginäre Achse. Zur Kennzeichnung der komplexen Größe wird der Zeiger unterstrichen.

Somit beschreibt der Zeiger $\underline{x}(t)$ in der komplexen Zahlenebene die harmonische Schwingung wie folgt:

$$\underline{x}(t) = \mathrm{Re}(\underline{x}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{x}) = \hat{x} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)] \; . \tag{3.12}$$

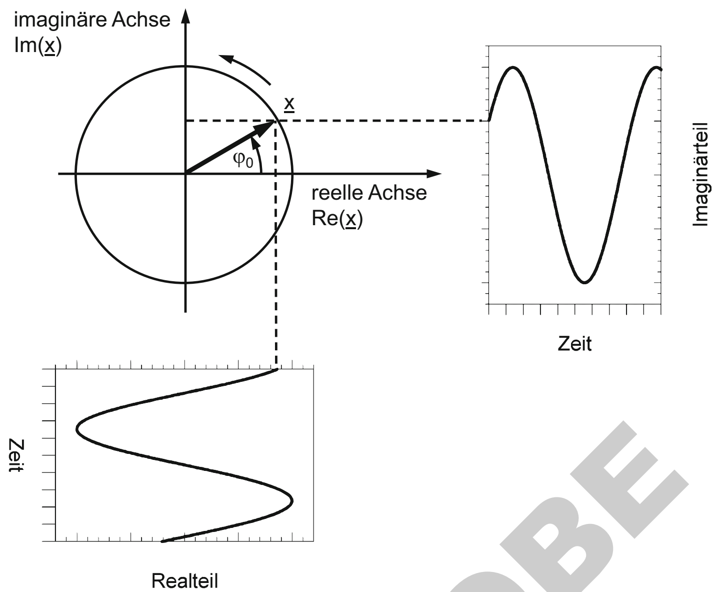

Abb. 3.2 Darstellung einer harmonischen Schwingung in der komplexen Zahlenebene

Die imaginäre Einheit j ist als $j^2 = -1$ definiert. Der Zeiger rotiert im Gegenuhrzeigersinn, ebenso sind alle Winkel im mathematisch positiven Richtungssinn festgelegt. Der Nullphasenwinkel φ_0 ist der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Zeiger zum Zeitpunkt $t = 0$. Zum Zeitpunkt $t > 0$ dreht für Kreisfrequenz $\omega > 0$ der Zeiger um ωt weiter. Für jeden definierten Zeitpunkt sind Real- und Imaginärteil in den Projektionen auf die Achsen ablesbar. Die betrachteten kinematischen Größen sind reell und weisen, auch bei Benutzung der komplexen Rechnung, nur einen Realteil auf. Der Imaginärteil existiert lediglich in der mathematischen Behandlung.

Unter Benutzung der Exponentialform schreibt man für Gl. 3.12 verkürzt:

$$\underline{x}(t) = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)} \,. \tag{3.13}$$

Die künftigen Betrachtungen vereinfachen sich, da der Betrag des Exponentialausdruckes den Wert $\left|e^{j(\omega t+\varphi_0)}\right| = 1$ annimmt. Schließlich kann in Gl. 3.13 die Amplitude $\hat{x}$ durch die sog. komplexe Amplitude ersetzt werden. Die *komplexe Amplitude* $\underline{\hat{x}}$ beschreibt die Anfangslage des Zeigers bei $t = 0$, der Term $e^{j\omega t}$ wird als *Zeitfunktion* bezeichnet:

$$\underline{x}(t) = \hat{x} \cdot e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = \underline{\hat{x}} \cdot e^{j\omega t} \,. \tag{3.14}$$

Die komplexe Amplitude $\underline{\hat{x}}$ enthält wohl die Amplitude $\hat{x}$ als auch den Nullphasenwinkel φ_0. Zwischen der komplexen Amplitude und dem Betrag des Zeigers als Ausdruck für

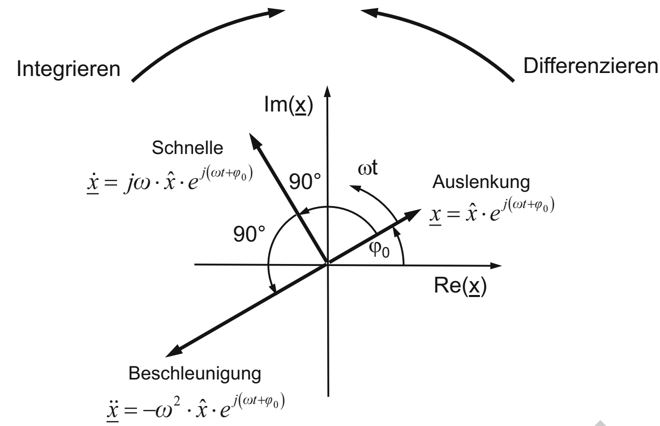

Abb. 3.3 Differentiation und Integration in Zeigerdarstellung

die Amplitude besteht folgende Beziehung:

$$|\hat{\underline{x}}| = \sqrt{(\mathrm{Re}(\underline{x}))^2 + (\mathrm{Im}(\underline{x}))^2} = \hat{x}\ . \tag{3.15}$$

Für den Nullphasenwinkel gilt:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\mathrm{Im}(\underline{x})}{\mathrm{Re}(\underline{x})}\ . \tag{3.16}$$

Die Vorteile beim Rechnen sollen abschließend durch die Herleitung der Schnelle und Geschwindigkeit dargestellt werden (Abb. 3.3).

Durch formale Differentiation nach der Zeit erhält man:

$$\dot{\underline{x}}(t) = j\omega \cdot \underline{x}(t) = j\omega \cdot \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}\ . \tag{3.17}$$

Dies entspricht einer Multiplikation der Auslenkung mit $j\omega$. Nochmalige Ableitung führt auf die Beschleunigung, was äquivalent zur Multiplikation der Auslenkung mit $-\omega^2$ ist:

$$\ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \cdot \underline{x}(t) = -\omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}\ . \tag{3.18}$$

Beispiel

Für die Ort-Zeit-Funktion $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ mit den folgenden Zahlenwerte $\hat{x} = 1$ mm, $f = 2{,}5$ Hz und $\varphi_0 = 30°$ sollen die Maxima der Schnelle und Beschleunigung berechnet werden.

Aus der Frequenz f wird die Periodendauer $T = 1/f = 0{,}4$ s berechnet. Diese Periodendauer ist als der Abstand der Maxima in Abb. 3.4 ablesbar.

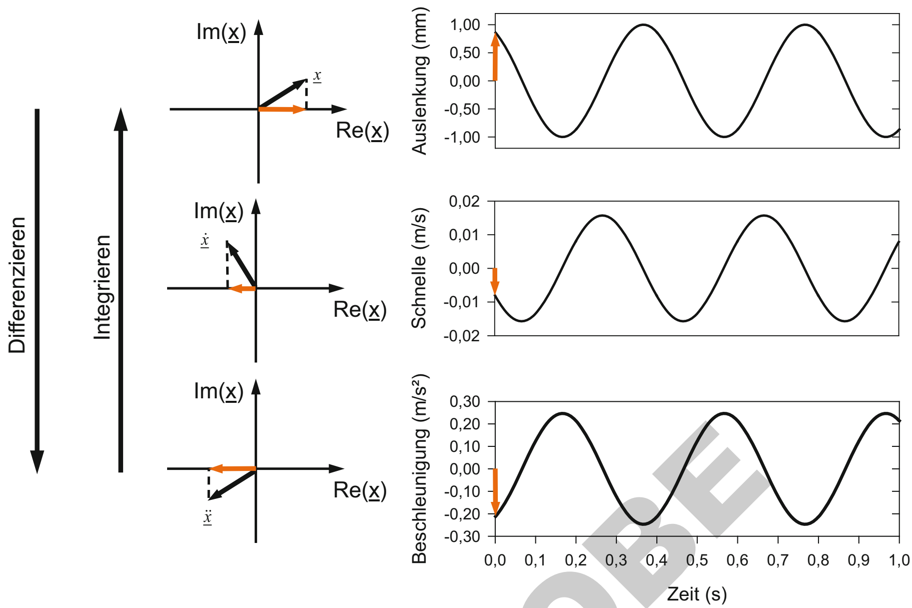

Abb. 3.4 Differentiation und Integration in Zeigerdarstellung (schematisch) und im Zeitverlauf

Mit der Frequenz f wird die Kreisfrequenz errechnet

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2{,}5\tfrac{1}{s} = 15{,}71\tfrac{1}{s}\ .$$

Somit ergibt sich die Amplitude der Schnelle zu

$$\hat{x} \cdot \omega = 10^{-3}\text{m} \cdot 15{,}71\tfrac{1}{s} = 0{,}016\tfrac{m}{s}\ .$$

Die Beschleunigungsamplitude wird in gleicher Vorgehensweise berechnet:

$$\hat{x} \cdot \omega^2 = 10^{-3}\text{m} \cdot 15{,}71^2\tfrac{1}{s^2} = 0{,}25\tfrac{m}{s}\ .$$

Diese Maxima können der Darstellung in Abb. 3.4 entnommen werden.

In der komplexen Zahlenebene bedeutet die Ableitung, dass der Zeiger den Betrag $\hat{x} \cdot \omega$ erhält und um +90° gedreht wird. Im Zeitbereich ist für $t = 0$ der Realteil des Zeigers aufgetragen (Abb. 3.4).

Eine zweimalige Differentiation (Abb. 3.4) entspricht im Zeigerdiagramm einer weiteren Drehung des Schnelle-Zeigers um +90°. Der Zeiger hat den Betrag $\hat{x} \cdot \omega^2$ und ein negatives Vorzeichen. Der Zeitbereich zeigt diesen Sachverhalt wiederum für $t = 0$. Im Gegensatz zum Differenzieren im Zeitbereich kann mit der Zeigerdarstellung sofort die zweite Ableitung gebildet werden und der Wechsel zwischen Cosinus- und Sinus-Funktion entfällt.

Für eine Integration muss der Zeiger durch $j\omega$ dividiert werden, für eine zweimalige Integration erfolgt die Division durch $-\omega^2$: Die Zusammenhänge sind im Zeitbereich und als Zeiger zusammenfassend in Abb. 3.4 verdeutlicht.

► **Tipp** In der Messpraxis findet die Multiplikation bzw. Division mit der Kreisfrequenz für harmonische Schwingungen Anwendung, wenn Amplituden umgerechnet werden sollen (z. B. Messung der Beschleunigungsamplitude und Berechnung der Wegamplitude).

3.3 Darstellung im Zeitbereich und Frequenzbereich

3.3.1 Begriffe

Die Grundlagen der Fourier-Transformation geht auf die historische Leistung von Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier (1768–1830) zurück, der 1822 in seinem Buch „Analytische Theorie der Wärme“ die Zerlegung beliebiger Funktionen in harmonische Schwingungen für thermodynamische Ausgleichsvorgänge beschrieb. Die Übertragung von Ergebnissen aus der Thermodynamik in die Signalverarbeitung darf als gelebtes Beispiel für einen fachübergreifenden Erkenntnistransfer gelten.

Die Darstellung der *Zeitfunktion* $x(t)$ in der geläufigen Form (Zeit t auf der Abszisse, Funktionswert x auf der Ordinate) stellt die Funktion im *Zeitbereich* (time domain) dar. Stellt man über der Frequenz nun die Amplitude $\hat{x}$ oder den Effektivwert $\tilde{x}$ dar, so spricht man vom *Spektrum* und von der dort dargestellten Funktion als *Spektralfunktion*. Die Darstellung der *Spektralfunktion* bezeichnet man als Darstellung im *Frequenzbereich* (frequency domain) oder *Spektralbereich*. Die *Fourier-Transformation* ist die Verknüpfung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich und ist als übergeordneter Begriff zu verstehen, der die *Analyse* und *Synthese* umfasst. Analyse bedeutet das Zerlegen der Zeitfunktion in harmonische Schwingungen. Wird ein Spektrum zu einer Zeitfunktion erstellt, so spricht man von der *Frequenzanalyse* oder *Spektralanalyse*. Unter *Synthese* wird das Zusammensetzen (Überlagern) der einzelnen Harmonischen zu einer Zeitfunktion verstanden. Wird aus einer Zeitfunktion ein Spektrum gebildet und daraus die Zeitfunktion rekonstruiert, so wird dies als *Resynthese* bezeichnet [1, 5–10].

Verkürzend wird als Fourier-Transformation die Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich verstanden. Da das Signal im Zeitbereich gemessen wird und anschließend in den Frequenzbereich transformiert wird, findet man auch den Begriff der „Hintransformation“. Die Transformation vom Frequenzbereich zurück in den Zeitbereich wird als „Rücktransformation“ oder *inverse Fourier-Transformation* bezeichnet.

Für die Anwendung der Fourier-Transformation muss nach den Kriterien periodisch oder aperiodisch sowie kontinuierlich und diskret unterschieden werden. Hierfür gibt es folgende Zuordnung: